Πρόταση: Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες και $a,b\in\mathbb{R}$ ώστε $a_n\to a$ και $b_n\to b$. Τότε:

(i) $a_n+b_n\to a+b$

(ii) $a_n\cdot b_n\to a\cdot b$

(iii) Αν $b_n\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$ και $b\neq 0$ $\frac{1}{b_n}\to\frac{1}{b}$

(iv) Αν $b_n\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$ και $b\neq 0$ $\frac{a_n}{b_n}\to\frac{a}{b}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$a_n\to a \iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}$
$|a_n-a|<\varepsilon\ \ \forall n\geq n_0$

Απόδειξη:

(iii) Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον $b_n\to b$ και $b\neq 0$ $\exists n_1\in\mathbb{N}$ ώστε $|b_n|>\frac{|b|}{2}$ $\forall n\geq n_1$

Επίσης, $\exists n_2\in\mathbb{N}$ ώστε $|b_n-b|<\varepsilon\frac{|b|^2}{2}$ $\forall n\geq n_2$

Θέτουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$

Για $n\in\mathbb{N}$ με $n\geq n_0$ $\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|b_n-b|}{|b_n||b|}\leq\frac{2}{|b|^2}|b_n-b|\overset{\text{για } n\geq n_1\geq n_2}{<}\frac{2}{|b|^2}\varepsilon\frac{|b|^2}{2}=\varepsilon$

Επομένως, $\frac{1}{b_n}\to\frac{1}{b}$

(iv) Προκύπτει άμεσα από τα (ii) και (iii).

Παράδειγμα:

$$x_n=\frac{5n^2+6n+4}{7n^2+4n+1}=\frac{5+6\cdot\frac{1}{n}+4\cdot\frac{1}{n^2}}{7+4\cdot\frac{1}{n}+1\cdot\frac{1}{n^2}}\qquad x_n\to\frac{5}{7}$$

$\left.\begin{array}{l}\lim 6=6\\ \lim\frac{1}{n}=0\end{array}\right\}\lim 6\cdot\frac{1}{n}=0$

$\left.\begin{array}{l}\lim\frac{1}{n}=0\\ \lim\frac{1}{n}=0\\ \lim 4=4\end{array}\right\}\lim 4\cdot\frac{1}{n^2}=0$

$\lim 5=5$

$\lim(5+6\cdot\frac{1}{n}+4\cdot\frac{1}{n^2})=5$

Ομοίως, $\lim(7+4\cdot\frac{1}{n}+1\cdot\frac{1}{n^2})=7$

$\lim x_n=\frac{5}{7}$

Πρόταση: Αν $-1<a<1$ ($\iff |a|<1$) τότε $\lim a^n=0$

Απόδειξη:

1η περίπτωση: $a=0$ τότε $a^n=0\ \forall n\in\mathbb{N}$ και $\lim a^n=0$

2η περίπτωση: Υποθέτουμε $a\neq 0$ τότε $0<|a|<1$ άρα $\frac{1}{|a|}>1$

Συνεπώς, $\frac{1}{|a|}=1+\theta$ για κάποιο $\theta>0$

Έτσι $\frac{1}{|a^n|}=(1+\theta)^n\overset{\text{Ανισότητα Bernoulli}}{\geq}1+\theta\cdot n>\theta\cdot n$

Άρα, $|a^n|<\frac{1}{\theta n}$. Έτσι $0\leq|a^n|\leq\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{n}\ \forall n\in\mathbb{N}$

$\lim \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{n} = 0$, $\lim 0 = 0$ } Από το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι $\lim |a^n| = 0$.
Άρα, $\lim a^n = 0$.

Πρόταση: Έστω $a > 0$, τότε $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Απόδειξη:

1η περίπτωση: $a = 1$. Τότε $\sqrt[n]{a} = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ άρα $\lim \sqrt[n]{a} = 1$

2η περίπτωση: $a > 1$ τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{a} > 1$

Άρα, $\sqrt[n]{a} = 1 + \theta_n$ $\forall \theta_n > 0$

Έτσι, $a = (\sqrt[n]{a})^n = (1+\theta_n)^n \overset{\text{Ανισότητα Bernoulli}}{\geq} 1 + \theta_n \cdot n > n \cdot \theta_n$

Έτσι, $0 < \theta_n < \frac{a}{n}$

Εφόσον $\lim 0 = 0$, $\lim \frac{1}{n} = 0$ άρα $\lim \frac{a}{n} = 0$.

Από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών προκύπτει $\lim \theta_n = 0$

Άρα, $\lim (1 + \theta_n) = 1$ δηλαδή $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

3η περίπτωση: $0 < a < 1$ τότε $\frac{1}{a} > 1$. Άρα, από τη 2η περίπτωση έχουμε

$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1 \Rightarrow \lim \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1 \underset{\substack{\lim b_n = b \\ \lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}}}{\Longrightarrow} \lim \sqrt[n]{a} = \frac{1}{1} = 1.$

Πρόταση: $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

Απόδειξη:

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\sqrt[2n]{n} \geq 1$

Άρα, $\sqrt[2n]{n} = 1 + \theta_n$ για κάποιο $\theta_n \geq 0$

$\sqrt{n} = (1+\theta_n)^n \overset{\text{Ανισότητα Bernoulli}}{\geq} 1 + n\theta_n > n\theta_n \Rightarrow 0 \leq \theta_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\sqrt[n]{n} = 1$. Δηλαδή $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots$

$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Εφόσον $\lim 0 = 0$, $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ } Από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχω $\lim \theta_n = 0$

Αφού, $\sqrt[n]{n} = (1+\theta_n)^2$ συμπεραίνουμε ότι $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Πρόταση: Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και a ώστε $a_n \to a$. Αν $k \in \mathbb{N}$, τότε $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$.

Απόδειξη:

1η περίπτωση: $a = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - 0| < \varepsilon^k$ $\forall n \geq n_0$.

Έστω $\forall n \geq n_0$ $|\sqrt[k]{a_n} - 0| = \sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$. Έτσι, $\lim \sqrt[k]{a_n} = 0 = \sqrt[k]{0}$

2η περίπτωση: $|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}| = \dfrac{|(\sqrt[k]{a_n})^k - (\sqrt[k]{a})^k|}{(\sqrt[k]{a})^{k-1} + (\sqrt[k]{a_n})(\sqrt[k]{a})^{k-2} + \ldots + (\sqrt[k]{a})^{k-1}} \leq \dfrac{|a_n - a|}{(\sqrt[k]{a})^{k-1}}$

Έστω $\varepsilon>0$, επιλέγουμε $n_0\in\mathbb{N}$ τότε $|a_n-a|<\varepsilon(\sqrt[k]{a})^{k-1}$ $\forall n\geq n_0$

Έστω $\forall n\geq n_0$ $|\sqrt[k]{a_n}-\sqrt[k]{a}|<\varepsilon$. Επομένως, $\lim\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{a}$

Παραδείγματα:

1) $a_n=\sqrt{n^2+5n+2}-\sqrt{n^2+2n+5}=\dfrac{(\sqrt{n^2+5n+2}-\sqrt{n^2+2n+5})(\sqrt{n^2+5n+2}+\sqrt{n^2+2n+5})}{\sqrt{n^2+5n+2}+\sqrt{n^2+2n+5}}=$

$=\dfrac{n^2+5n+2-n^2-2n-5}{n\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}\right)}=\dfrac{3n-3}{n\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}\right)}=\dfrac{3-\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}}$

$\left.\begin{array}{l}\lim 3=3\\ \lim\frac{3}{n}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\left(3-\frac{3}{n}\right)=3$

$\left.\begin{array}{l}\lim\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}=1\\ \lim\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}\right)=2$

$\Rightarrow\lim a_n=\dfrac{3}{2}$

2) $x_n=\sqrt[n]{3^n+7^n}$

$\underbrace{7}_{\lim 7=7}=\sqrt[n]{7^n}\leq x_n\leq\sqrt[n]{7^n+7^n}=\sqrt[n]{2\cdot 7^n}=\underbrace{\underbrace{7}_{\lim 7=7}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\lim\sqrt[n]{2}=1}}_{\lim 7\sqrt[n]{2}=7}$

Από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε $\lim x_n=7$.

3) $b_n=\dfrac{2n^2+7}{n^3+1}+\dfrac{2n^2+7}{n^3+2}+\dots+\dfrac{2n^2+7}{n^3+n}$

$n\cdot\dfrac{2n^2\cdot 7}{n^3+n}\leq b_n\leq n\cdot\dfrac{2n^2\cdot 7}{n^3+1}$

$\dfrac{2+\frac{7}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\leq b_n\leq\dfrac{2+\frac{7}{n^2}}{1+\frac{1}{n^3}}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\dfrac{2+\frac{7}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=2\\ \lim\dfrac{2+\frac{7}{n^2}}{1+\frac{1}{n^3}}=2\end{array}\right\}$ Από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχω $\lim b_n=2$.

4) $a_n=\sqrt[n]{7n^3+5n^2+6}$

$\underbrace{1}_{\lim 1=1}\leq a_n\leq\sqrt[n]{7n^3+5n^3+6n^3}=\sqrt[n]{18n^3}=\underbrace{\sqrt[n]{18}\,(\sqrt[n]{n})^3}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\sqrt[n]{18}=1\\ \lim(\sqrt[n]{n})^3=1\end{array}\right\}\lim\sqrt[n]{18n^3}=1$

Από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχω $\lim a_n=1$.

5) $b_n=\sqrt[n]{n^{20}3^n+7^n}$

$7=\sqrt[n]{7^n}\leq b_n\leq\sqrt[n]{n^{20}\cdot 7^n+7^n}=\sqrt[n]{7^n(n^{20}+1)}=\sqrt[n]{7^n(n^{20}+n^{20})}=\sqrt[n]{7^n\cdot 2\cdot n^{20}}=7\cdot\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n^{20}}$

$\left.\begin{array}{l}\lim 7=7\\ \lim\sqrt[n]{2}=1\\ \lim\sqrt[n]{n^{20}}=1\end{array}\right\}\lim 7\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n^{20}}=7$

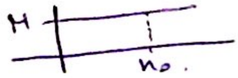
$\lim 7=7$

Από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών

έχω $\lim b_n=7$.

<u>Ορισμός:</u> Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών

α) Λέμε ότι η (a_n) τείνει στο $+\infty$ αν $\forall M>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $a_n>M\ \forall n\geq n_0$



Συμβολίζουμε $\lim a_n=+\infty$

β) Λέμε ότι η (a_n) τείνει στο $-\infty$ αν $\forall M>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $a_n<-M\ \forall n\geq n_0$.

Συμβολίζουμε $\lim a_n=-\infty$

<u>Παραδείγματα:</u>

$a_n=\sqrt[3]{n}$ Θα δείξουμε ότι $\lim a_n=+\infty$

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $M>0$. Επιλέγουμε $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $n_0>M^3$ $\forall n\in\mathbb{N}$ με $n\geq n_0$ έχουμε:

$\sqrt[3]{n}\geq\sqrt[3]{n_0}\geq\sqrt[3]{M^3}=M$ Συνεπώς, $\lim\sqrt[3]{n}=+\infty$

<u>ΕΥΚΟΛΑ ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΟΝΤΑΙ ΤΑ ΕΞΗΣ:</u>

α) $\lim n=+\infty$

β) Αν $a_n\geq b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και $\lim b_n=+\infty$ τότε $\lim a_n=+\infty$

γ) Αν $a_n\geq b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και $\lim a_n=-\infty$ τότε $\lim b_n=-\infty$

δ) Αν $a_n\to+\infty$ και $k\in\mathbb{N}$ τότε $a_n^k\to+\infty$

ε) Αν $a_n\to+\infty$ αν k άρτιος $a_n^k\to+\infty$

αν k περιττός $a_n^k\to-\infty$

<u>Θεώρημα:</u> Κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία.

Τότε, το σύνολο A που αποτελείται από τους όρους της ακολουθίας, είναι μη κενό και άνω φραγμένο άρα, από το αξίωμα της πληρότητας θα έχει supremum

Θέτουμε $x=\sup A$ και θα δείξουμε ότι $\lim a_n=x$.

$x-\varepsilon<\boxed{a_n<x+\varepsilon}$

<u>Έστω $\varepsilon>0$</u>. Εφόσον $x=\sup A$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε το $a_{n_0}>x-\varepsilon$

Τότε $\forall n\geq n_0$ αφού η ακολουθία είναι αύξουσα ισχύει:

$x-\varepsilon<a_{n_0}\leq a_n\leq x<x+\varepsilon$.

$|a_n-x|<\varepsilon$ Άρα, $\lim a_n=x$.

Παρατήρηση: Αν η a_n είναι αύξουσα αλλά όχι άνω φραγμένη, τότε $\lim a_n = +\infty$.

Απόδειξη: Έστω $M>0$. Εφόσον a_n όχι άνω φραγμένη $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $a_{n_0} > M$ $\forall n \geq n_0$. Εφόσον a_n αύξουσα $a_n \geq a_{n_0} > M$. Άρα $\lim a_n = +\infty$.

Θεώρημα: Κάθε φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

Παρατήρηση: Αν η a_n είναι φθίνουσα αλλά όχι κάτω φραγμένη, τότε $\lim a_n = -\infty$

Άσκηση: Θεωρούμε $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_1 = \sqrt{5}$ και $a_{n+1} = \sqrt{5+a_n}$

Απόδειξη: Με επαγωγή

$\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n \leq a_{n+1}$

1ο επαγωγικό βήμα: $a_1 = \sqrt{5}$, $a_2 = \sqrt{5+\sqrt{5}}$ $\quad a_1 \leq a_2$ Άρα για $n=1$ ισχύει

γενικό επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι $a_n \leq a_{n+1}$ και θα δείξουμε ότι $a_{n+1} \leq a_{n+2}$

$$5 + a_n \leq 5 + a_{n+1} \Rightarrow \sqrt{5+a_n} \leq \sqrt{5+a_{n+1}} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}$$

Άρα η ακολουθία είναι αύξουσα.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad a_n \leq 10$

1ο επαγωγικό βήμα: Για $n=1$ $a_1 = \sqrt{5} \leq 10$

γενικό επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε $a_n \leq 10$

$$\Rightarrow 5 + a_n \leq 15 \Rightarrow \sqrt{5+a_n} \leq \sqrt{15} \Rightarrow a_{n+1} \leq \sqrt{15} \leq 10 \Rightarrow a_{n+1} \leq 10$$

Άρα η ακολουθία είναι άνω φραγμένη από το 10.

Η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη άρα συγκλίνουσα.

Θέτω $x = \lim a_n$

$$a_n \to x \Rightarrow \underline{a_{n+1} \to x}$$

$$a_n \to x \Rightarrow 5 + a_n \to 5 + x \Rightarrow \sqrt{5+a_n} \to \sqrt{5+x} \Rightarrow \underline{a_{n+1} \to \sqrt{5+x}}.$$

Από τη μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας προκύπτει:

$$\sqrt{5+x} = x \underset{5+x>0}{\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}} x^2 = 5 + x \Leftrightarrow x^2 - x - 5 = 0$$

$$\Delta = 1 + 20 = 21 \quad x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}, \text{ όμως } x>0, \text{ άρα } x = \frac{1+\sqrt{21}}{2}.$$